Kurvendiskussion: gebrochen-rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}} = \frac{z_z \cdot x^m + \ldots + b_z \cdot x + a_z}{z_n \cdot x^n + \ldots + b_n \cdot x + a_n}$$

1. Typ

   höchster Exponent = Grad der Funktion

   - Wie verhalten sich Zähler- und Nennergrad zueinander?

2. Definitionsmenge

   Die Definitionsmenge beschreibt die Menge der zulässigen x-Werte. Da die Division durch Null nicht erlaubt ist, gilt: **D** = **R** \ {Nenner-Nullstellen}

3. Nullstellen

   Die Nullstellen einer Funktion stellen die gemeinsamen Punkte von Funktionsgraf und x-Achse dar. Man berechnet die Nullstellen, indem man den Funktionsterm gleich Null setzt: f(x) = 0

   Da ein Bruch Null ist, sobald der Zähler Null ist, sind die Nullstellen der Funktion durch die Zähler-Nullstellen gegeben.

4. Untersuchung der Definitionslücke

   Nenner-Nullstelle = Zähler-Nullstelle $\Rightarrow$ Lücke / Loch

   Nenner-Nullstelle $\neq$ Zähler-Nullstelle $\Rightarrow$ Polstelle / senkrechte Asymptote
   mit VZW: Linearfaktor hat ungeraden Exponenten
   ohne VZW: Linearfaktor hat geraden Exponenten

5. Schnitt mit der y-Achse

   x = 0 $\Rightarrow$ S_y(0 | f(0))

6. Symmetrie

   Achsensymmetrie zur y-Achse: Zähler- und Nennerpolynom haben die gleiche Symmetrie

   Punktsymmetrie zum Ursprung: Zähler- und Nennerpolynom haben verschiedene Symmetrie

   Ist die einfache Symmetrie des Zähler- und/ oder Nennerpolynoms zerstört, so bedeutet dies, dass keine einfache Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse vorliegt. Achtung: Dies bedeutet nicht, dass die Funktion keine Symmetrie besitzt!

7. Verhalten für $x \to \pm\infty$

- Grad(Zähler) m < Grad(Nenner) n $\Rightarrow$ x-Achse ist waagerechte Asymptote
- Grad(Zähler) m = Grad(Nenner) n $\Rightarrow$ waagerechte Asymptote
- Grad(Zähler) m > Grad(Nenner) n $\Rightarrow$ schiefe Asymptote vom Grad m-n

Den Term für die Asymptote erhält man durch Polynomdivision (PD):

Zählerterm : Nennerterm = ganzer Anteil + gebrochener Rest

mit x: schiefe Asymptote
ohne x: waagerechte Asymptote

beschreibt Annäherungsverhalten

8. Ableitungen

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

9. Extrema: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \begin{matrix} < 0 \Rightarrow \text{Max.} \\ > 0 \Rightarrow \text{Min.} \end{matrix}$

10. Wendepunkte: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

11. Skizze

Übungen

Jonczyk-Schneider, Kap. 5.3.